РЫБИНСКОЕ ОРДЕНА "ЗНАК ПОЧЕТА" УЧИЛИЩЕ ИМЕНИ В.И. КАЛАШНИКОВА-ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "ВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ТРАНСПОРТА

ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

РЫБИНСК
2026

I. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ФУНКЦИИ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

1. Функция: определение, способы задания, график.
2. Полярные координаты. Задания функции в полярных координатах и параметрическими уравнениями.
3. Предел функции. Неопределенности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства пределов функций.
4. Способы отыскания пределов функции. Замечательные пределы.
5. Непрерывность функции. Свойства непрерывных функций. Точки разрыва и их классификация.

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Производная: определение, геометрический, механический и экономический смысл.
2. Производные основных элементарных функций. Правила дифференцирования. Производные сложной и обратной функций.
3. Метод логарифмического дифференцирования.
4. Производные функций заданных параметрически и неявно.
5. Дифференциал функции.
6. Производные и дифференциалы высших порядков.
7. Условия возрастания и убывания функции. Точки экстремума и экстремумы функции.
8. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.
9. Асимптоты кривых и их нахождение.
10. Схема исследования функции и построение ее графика.
12. Правило Лопиталя.

III. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

1. Понятие комплексного числа, комплексная плоскость.
2. Форма записи комплексного числа: алгебраическая, тригонометрическая, показательная.
3. Действия над комплексными числами.
4. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители.

IV. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Таблица простейших интегралов. Основные методы интегрирования и классы интегрируемых функций.
3. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
4. Определенный интеграл и его свойства.
5. Формула Ньютона-Лейбница вычисления определенного интеграла.
6. Методы вычисления определенных интегралов.
7. Несобственные интегралы и их свойства.
8. Приложения определенных интегралов.
9. Методы приближенного вычисления определенных интегралов: формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2005. – 736 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. – М.: Профессия, 2006. – 432 с.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: АСТ, 2009. – 560 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. пособие для втузов: В 2-х т. Т.1. – Стереотип.изд. – М.: Интеграл-Пресс, 2009. – 415 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. пособие для втузов: В 2-х т. Т.2. – Стереотип.изд. – М.: Интеграл-Пресс, 2009. – 544 с.
6. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1998. – 479 с.
7. Электронная библиотечная система «Университетская книга».
8. Электронная библиотечная система вуза на www.rsatu.ru
9. Электронные ресурсы на сайте кафедры http://www.rsatu.ru/sites/vmat/
10. Электронная библиотека www.math.ru
11. Образовательный математический сайт www.exponenta.ru

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ФУНКЦИИ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

1. Функция

$y = f(x)$ – функция, $y_0 = f(x_0)$ – значение функции в точке $x = x_0$.

$y = f(x)$ – явное задание функции; $F(x, y) = 0$ – неявное задание некоторой функции $y = g(x)$;

$x = x(t),\ y = y(t)$ – параметрическое задание некоторой функции $y = \varphi(x)$.

$\rho = f(\varphi)$ - задание некоторой функции $y = Ф(x)$ в полярных координатах, где ρ, φ – полярные координаты, при этом: $x = \rho\cos(\varphi)$, $y = \rho\sin(\varphi)$.

2. Условие непрерывности

Функция $y = f(x)$ непрерывна при значении $x = x_0$ (в точке $x = x_0$), если выполняется равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если это равенство не выполняется, то x_0 – точка разрыва функции.

При этом,

если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A - const$ $f(x_0) = B - const$ и $A \neq B$ или $f(x_0)$ не определена, то точка x_0 – устранимый разрыв;

если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 - const$, а $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2 - const$ и $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 – разрыв первого рода;

если, хотя бы один односторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, или не существует, то точка x_0 – разрыв второго рода.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

$y = f(x)$ – функция, Δx – приращение независимой переменной x, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ – приращение функции. Тогда производная функции: $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Производная в точке – это конечный предел. Если этот предел бесконечный или не существует, то функция производной в точке не имеет.

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием.

Если функция разрывна в точке $x = x_0$, то она не имеет производной в этой точке.

1) *Таблица производных основных элементарных функций*

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\quad (c' = 0,\ x' = 1,\ (\sqrt{\text{x}})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}})$.

2. $(a^x)' = a^x \ln a$ $\quad ((e^x)' = e^x)$. 3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$.

4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. 5. $(\sin x)' = \cos x$. 6. $(\cos x)' = -\sin x$.

7. $(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. 8. $(\text{ctg}x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$. 9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. 11. $(\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. 12. $(\text{arcctg}x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

2) *Правила дифференцирования*

c – постоянная (константа), $u = u(x),\ v = v(x)$ – функции.

1. $c' = 0$. 2. $(cu)' = cu'$. 3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. 5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

6. $y = F(\varphi(x))$ – сложная функция, тогда: $(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

Примеры: Найти производные функций:

1. $y = 9\sqrt[3]{x^5} + 2,\quad y' = 9(x^{5/3})' + 2' = 9 \cdot \dfrac{5}{3} x^{5/3-1} + 0 = 15x^{2/3} = 15\sqrt[3]{x^2}$.

2. $y = x^3 \text{arctg}\ 2x - \cos 3x,\quad y' = (x^3)' \text{arctg}\ 2x + x^3 (\text{arctg}\ 2x)' - (\cos 3x)' =$

$= 3x^2 \text{arctg}\ 2x + \dfrac{2x^3}{1+4x^2} + 3\sin 3x.$

3. $y = \ln(\arcsin\sqrt{x})$ – сложная функция $y = F(\varphi(g(x)))$.

Тогда $y' = F' \cdot \varphi' \cdot g'$ и $y' = \dfrac{1}{\arcsin\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. $xy^3 - \sin 2x - y - x + 1 = 0$ – неявное задание некоторой функции $y = g(x)$.

Требуется найти $y' = (g(x))'$. Дифференцируем:

$y^3 + 3xy^2 y' - 2\cos 2x - y' - 1 = 0$ и находим отсюда y':

$$(3xy^2 - 1)y' = 2\cos 2x - y^3 + 1,\ y' = \frac{2\cos 2x - y^3 + 1}{3xy^2 - 1}.$$

5. $x = \operatorname{arctg} t,\ y = 2^{3t+1}$ – это параметрическое задание некоторой функции $y = \varphi(x)$. Найти $y'_x = (\varphi(x))'$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3 \cdot 2^{3t+1} \ln 2}{\frac{1}{1+t^2}} = 3\ln 2 (1+t^2) 2^{3t+1}.$$

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ

Выражение $z = x + yi$ называется комплексным числом. x и y – действительные числа, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $(i^2 = -1)$.

$z = 2 - 3i,\ z = 1/5 + 6i,\ z = 9i,\ z = 21$ – комплексные числа. Действительные числа являются подмножеством множества комплексных чисел.

Число $\overline{z} = x - yi$ называется сопряженным числу $z = x + yi$.

Действия над комплексными числами:

$z_1 = x_1 + y_1 i,\ z_2 = x_2 + y_2 i.$

1. Сложение: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$

2. Вычитание: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$

3. Умножение: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 =$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Замечание. $z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2.$

4. Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}.$

Тригонометрическая форма записи.

$z = x + yi$ – алгебраическая форма записи комплексного числа.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = y/x$, $\varphi = \operatorname{arctg} y/x$.

Пример. $z = -2 + 2i$.

$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2}{-2} = -1$, $\varphi = 3\pi/4$.

$z = 2\sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4})$ – тригонометрическая форма записи комплексного числа $z = -2 + 2i$.

5. *Возведение в степень.*

n – натуральное число, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

$z^n = z \cdot z ... z \quad (z^2 = z \cdot z,\ z^3 = z \cdot z \cdot z)$.

$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ – формула Муавра.

Пример.

$$z^{15} = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^{15} = [1(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})]^{15} = 1^{15}(\cos 15 \cdot \frac{\pi}{3} + i\sin 15 \cdot \frac{\pi}{3}) =$$

$$= \cos 5\pi + i\sin 5\pi = -1 + i0 = -1.$$

6. *Извлечение корня.*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}),$$

где $\sqrt[n]{r}$ – арифметический корень, $k = 0,1,...,n-1$. $\sqrt[n]{z}$ имеет n *различных значений* действительных или комплексных.

Пример. $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)} = 2(\cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi + 2k\pi}{3})$.

1) $k = 0$, $z_1 = 2(\cos\pi/3 + i\sin\pi/3) = 1 + \sqrt{3}\ i$;

2) $k = 1$, $z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$;

3) $k = 2$, $z_3 = 2(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}) = 1 - \sqrt{3}\ i$.

Числа -2, $1 + \sqrt{3}\ i$, $1 - \sqrt{3}\ i$ – это значения корня $\sqrt[3]{-8}$.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Если $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

$$\int f(x)\mathrm{dx} = F(x) + C$$

– неопределенный интеграл (множество первообразных), C – произвольная постоянная.

1. *Правила интегрирования*

1) $\int Cf(x)\mathrm{dx} = C\int f(x)\mathrm{dx};$

2) $\int (f(x) \pm g(x))\mathrm{dx} = \int f(x)\mathrm{dx} \pm \int g(x)\mathrm{dx};$

3) если $\int f(x)\mathrm{dx} = F(x) + C$, то $\int f(u)\mathrm{du} = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$.

В частности, $\int f(ax+b)\mathrm{dx} = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

2. *Таблица простейших интегралов*

1. $\int x^n \mathrm{dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.$

2. $\int \frac{\mathrm{dx}}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x \mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int e^x \mathrm{dx} = e^x + C.$

5. $\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$

6. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

7. $\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

8. $\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

9. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

10. $\int \sin x\mathrm{dx} = -\cos x + C.$

11. $\int \cos x\mathrm{dx} = \sin x + C.$

12. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C.$

13. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C.$

14. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

15. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + C.$

3. *Методы интегрирования*

1) Преобразование дифференциала (метод подведения под дифференциал)

$$x^n dx = \frac{1}{a \cdot (n+1)} d(ax^{n+1} + b); \quad f'(x)\mathrm{dx} = d(f'(x)).$$

2) Замена переменной.

Если $x = \varphi(t)$ – дифференцируемая функция, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

3) Формула интегрирования по частям.

Если $u = u(x),\ v = v(x)$ – дифференцируемые функции, то

$$\int udv = uv - \int vdu + C.$$

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int (\frac{\sqrt{x}}{x^2} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 7)dx = \int x^{-3/2}dx - 5\int 6^x dx + 7\int dx =$

$$= \frac{x^{-1/2}}{-1/2} - \frac{5 \cdot 6^x}{\ln 6} + 7x + C = \frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{5 \cdot 6^x}{\ln 6} + 7x + C.$$

2. $\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}dx \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right|$ замена переменной$| = \int \frac{2t^3 dt}{t^2 + t} = 2\int \frac{t^2 dt}{t+1} =$

$$= 2\int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t+1} dt = 2\int (t - 1 + \frac{1}{t+1})dt = 2(\int tdt - \int dt + \int \frac{dt}{t+1}) =$$

$$= 2(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|) + C = 2(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}+1)) + C.$$

3. $\int (5x-6)\cos 3xdx$ – следует применить формулу $\int udu = uv - \int vdu + C$ интегрирования по частям.

$$\int (5x-6)\cos 3xdx \left| \begin{matrix} u = 5x - 6,\ du = 5dx \\ dv = \cos 3xdx,\ v = \int \cos 3xdx = \frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}(5x-6)\sin 3x - \frac{5}{3}\int \sin 3xdx = \frac{1}{3}(5x-6)\sin 3x + \frac{5}{9}\cos 3x + C.$$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = F(b) - F(a)\ -$$

формула Ньютона-Лейбница, где *F(x)* – первообразная функции *f(x)*.

Основные методы интегрирования аналогичны методам, применяемым в неопределенном интеграле, например:

1) Замена переменной.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{dt},$$

где $\varphi(\alpha)=a,\ \ \varphi(\beta)=b$ (при замене переменной следует пересчитать пределы интегрирования).

2) Формула интегрирования по частям.

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Вариант задания контрольной работы определяет преподаватель.
2. Контрольная работа выполняется в школьной тетради, на обложку которой наклеивается титульный лист (см. образец титульного листа).
3. Перед решением условие задачи переписывается полностью.
4. При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться последовательности задач, данных в задании.
5. Решение задач следует излагать подробно, сопровождая необходимыми объяснениями.
6. Выполнять чертежи и строить графики функций, если это требуется заданием.
7. В конце решения обязательно записывается ответ.
8. По получении прорецензированной, но не зачтенной работы все необходимые исправления и дополнения следует сделать на последующих после рецензии страницах этой же тетради.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

1. Найти пределы:

1.1. *a*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5-x}-1}{3-\sqrt{5+x}}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^2}{1-\cos 4x}$.

1.2. *a*) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$; *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3-x}$.

1.3. *a*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cos x-\cos 5}{5-x}$.

1.4. *a*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$; *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{2-x}$.

1.5. *a*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos x-\cos 1}{1-x^2}$.

1.6. *a*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-x^2-1}{2x^2-7x+5}$; *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-2x}{1-2x}\right)^{4-3x}$.

1.7. *a*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{x^2-1}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x/2-\sin 1/2}{1-x^2}$.

1.8. *a*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-3x^2+5x}{x^3-27}$; *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-2x}{1-2x}\right)^{5-x}$.

1.9. *a*) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2x^2}$.

1.10. *a*) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$; *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8-3x}{5-3x}\right)^{3x+4}$.

1.11. *a*) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2-11x+5}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sin(x-1)}$.

1.12. *a*) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$; *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4-x}\right)^{2x+1}$.

1.13. *a*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x-5}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 3x}$.

1.14. *a*) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{8x^3-1}{x^2-0,25}$; *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)^{2x+5}$.

1.15. *a*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-5}{x^4+5x^2-1}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\cdot\operatorname{tg} 2x}$.

1.16. *a*) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{30+x-x^2}{125+x^3}$; *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+7}{3x-3}\right)^{2-x}$.

1.17. *a*) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{2x+4}-6}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{25-x^2}$.

1.18. *a*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-28}{x^3-64}$; *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-7}\right)^{2-4x}$.

1.19. *a*) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2 3x}$.

1.20. *a*) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{5x-x^2+14}$; *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+1}{7x-8}\right)^{2x-1}$.

2. Исследовать функцию на непрерывность. Указать точки разрыва, определить их род. Сделать схематический чертеж.

2.1. $y=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ |x-1|, & x\ge 0.\end{cases}$

2.2. $y=\begin{cases}\ln|x-1|, & x\ge 0,\\ 2^{-1/x}, & x<0.\end{cases}$

2.3. $y=\dfrac{x^4-1}{|x^2-1|}$.

2.4. $y=\begin{cases}3^{x+2}, & x\le -1,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{2}{x+1}, & x>-1.\end{cases}$

2.5. $y=\begin{cases}\operatorname{arctg}(\dfrac{-1}{x}), & x<0,\\ \arcsin(1-x), & x\ge 0.\end{cases}$

2.6. $y=x^2-\dfrac{|x+1|}{x+1}-1$.

2.7. $y=\dfrac{4}{2-2^{\frac{2}{x-1}}}$.

2.8. $y=\begin{cases}(1/3)^{x-1}, & x\le 0,\\ \left|\dfrac{\sin 3x}{x}\right|, & x>0.\end{cases}$

2.9. $y=\begin{cases}\arcsin(x+1), & x\le 0,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

2.10. $y=\begin{cases}2^{\frac{1}{x-2}}, & x>2,\\ |\ln(2-x)|, & x<2.\end{cases}$

2.11. $y=\left|2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}+1\right|$.

2.12. $y=\begin{cases}\left|x+\pi/2+1\right|, & x\le -1,\\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}, & x>-1.\end{cases}$

2.13. $y=1+\dfrac{x+1}{|x+1|}-x^2$.

2.14. $y=\begin{cases}\left(1/3\right)^{\frac{1}{x-1}}, & x<1,\\ \ln|x-2|, & x\ge 1.\end{cases}$

2.15. $y=\begin{cases}\operatorname{tg} x, & x\le 0,\\ \log_2(\dfrac{1}{x}), & x>0.\end{cases}$

2.16. $y=\dfrac{2}{3^{\frac{1}{x-1}}-3}$.

2.17. $y=\dfrac{x+1}{\left|1-x^2\right|}$.

2.18. $y=\dfrac{x^3-1}{|x-1|}-1$.

2.19. $y=\begin{cases}2^{x+1}, & x\le 0,\\ \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x>0.\end{cases}$

2.20. $y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}, & x<-1,\\ \arccos x, & x\ge -1.\end{cases}$

3. Найти производную y'_x функции, заданной явно, неявно или параметрически.

3.1. *a*) $y=\sqrt[3]{x}\cdot 3^{2x+1}-\dfrac{2}{x}+2$; *b*) $x=\ln(t^2+1),\ y=\arccos\sqrt{t}$.

3.2. *a*) $y=\sin^2 5x+\operatorname{arctg} x^2-3$; *b*) $x^2y^2-\sin 2y=x+1$.

3.3. *a*) $y=\operatorname{tg}^3 2x-\dfrac{\ln x}{x}+\sqrt{2}$; *b*) $x=\arcsin t^2,\ y=\sqrt[3]{2t+1}$.

3.4. *a*) $y=\ln(\sin x^2)+x^3 3^x-\pi$; *b*) $\operatorname{tg} y^2+2x=xy-1$.

3.5. *a*) $y=\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+2}-\dfrac{x^2}{\sin 2x}+e$; *b*) $x=\operatorname{ctg}\sqrt{t},\ y=\ln(\sqrt{t}+1)$.

3.6. *a*) $y=\arcsin^2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\cdot\operatorname{tg} 3x-x$; *b*) $xy^2-2^y=x^2y+2x$.

3.7. *a*) $y=3^{\cos\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2}+2e$; *b*) $x=\operatorname{arctg}2t,\ y=\ln(t^3-3t)$.

3.8. *a*) $y=\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}-2x^2\arcsin\sqrt{x}$; *b*) $\sin\sqrt{y}+3x^2=x^2y+1$.

3.9. *a*) $y=2^{1+\operatorname{tg} 3x}+\dfrac{\sin^2 x}{x^2}-5$; *b*) $x=\ln\cos 2t,\ y=\sqrt{t^2+1}$.

3.10. *a*) $y=\operatorname{ctg}^3 3x-\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}\cdot 2^{x^2}$; *b*) $\ln(y+1)-x^2y^2-2x^3=0$.

3.11. *a*) $y=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+\dfrac{1}{x^2}-1$; *b*) $x=\arcsin\sqrt{t},\ y=\arccos t^2$.

3.12. *a*) $y=5^{1-\cos 2x}-x\ln x+2$; *b*) $x^3y^2+\ln(xy)=x$.

3.13. *a*) $y=x\sin^2 2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; *b*) $x=\operatorname{tg}(t^2+1),\ y=e^{2-4t}$.

3.14. *a*) $y=\ln(\sqrt{x}+1)-x^2\operatorname{tg} 2x$; *b*) $x=\operatorname{tg} 2t,\ y=\arcsin(t+1)$.

3.15. *a*) $y=\dfrac{\ln x}{x^3}-\sin\sqrt{x+1}-5$; *b*) $xy^3-\ln y=y-x^2$.

3.16. *a*) $y=\operatorname{arctg} x^2+x^3 2^{x+5}+\pi$; *b*) $\sin y^2+x^2y^2=e^x-1$.

3.17. *a*) $y = 2^{\operatorname{tg} 2x-1} - \dfrac{\sin 2x}{x^2} + 1;$ *b*) $x = \operatorname{ctg}\sqrt{t},\ y = \ln(2t+1).$

3.18. *a*) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}} + 2x^3 \operatorname{arctg} 3x;$ *b*) $xy^2 - 2^{x+3} = 5x - y.$

3.19. *a*) $y = \operatorname{tg}\sqrt{x+1} - \dfrac{2\ln x}{x^2} - \sqrt{2};$ *b*) $x = \arcsin 2t,\ y = \operatorname{arctg} t^2.$

3.20. *a*) $y = \cos^3 3x + \arcsin\sqrt{x} - 5x;$ *b*) $\ln y - xy^2 = 3x^2 + y.$

4. Найти и построить асимптоты графика функции.

4.1. $y = 2x - \operatorname{arctg} 3x.$

4.2. $y = \dfrac{7 - 5x^2 + 3x^3}{x^2 + x - 6}.$

4.3. $y = \dfrac{6x^2}{1 - 2x}.$

4.4. $y = \dfrac{2x^5}{16 - x^4}.$

4.5. $y = \dfrac{5x^3 - x - 1}{x^2 + 3x}.$

4.6. $y = \dfrac{2x^3 - x}{2 - x - x^2}.$

4.7. $y = \operatorname{arcctg} x - 3x.$

4.8. $y = \dfrac{11 - 3x + 5x^2}{x}.$

4.9. $y = 5x - 4\operatorname{arctg} x^2.$

4.10. $y = \dfrac{7x^4 - x}{x^3 + 8}.$

4.11. $y = \dfrac{2 + x - 5x^3}{3x + x^2}.$

4.12. $y = \dfrac{3x^2}{2x + 4}.$

4.13. $y = 2\operatorname{arctg} 2x - 4x.$

4.14. $y = 3x - \dfrac{\ln x}{x}.$

4.15. $y = \dfrac{2 - 2x^2 + 5x^3}{x^2 - 2x - 3}.$

4.16. $y = 2\operatorname{arctg} x^2 - 3x.$

4.17. $y = (x+1)e^{2x-1}.$

4.18. $y = \dfrac{4x^3 + x^2 - 6}{3 + 2x - x^2}.$

4.19. $y = \operatorname{arcctg}|x| + 2x.$

4.20. $y = \dfrac{2x - 5x^4}{8 - x^3}.$

5. Вычислить комплексное число. Ответ записать в алгебраической форме.

5.1. $\left(\dfrac{1}{1+2i^{15}}\right)^2 - \dfrac{1}{1-3i^{16}};$

5.2. $\left(\dfrac{1+i^3}{2-i^{17}}\right)^2 + \dfrac{1}{3+2i^{17}};$

5.3. $\left(\dfrac{i}{2-3i^{29}}\right)^2 + \dfrac{2i}{5i^{20}-1};$

5.4. $\left(\dfrac{1}{1-i^{37}}\right)^2 - \dfrac{5}{2i^{22}+3};$

5.5. $\left(\frac{1+i}{2+i^{32}}\right)^2-\frac{2}{6i^{25}-3}$;

5.6. $\left(\frac{i}{1+2i^{34}}\right)^2+\frac{3}{7i^{45}+1}$;

5.7. $\left(\frac{1}{3+i^{21}}\right)^2+\frac{3}{2+3i^{23}}$;

5.8. $\left(\frac{1+2i}{1+3i^{40}}\right)^2+\frac{i}{4+i^{16}}$;

5.9. $\left(\frac{i}{2+3i^{28}}\right)^2-\frac{5}{i^7+2}$;

5.10. $\left(\frac{-i^6}{1+2i^{23}}\right)^2-\frac{3i}{1-5i^{14}}$;

5.11. $\left(\frac{i^4}{2-i^{15}}\right)^2+\frac{i-2}{1-3i^{16}}$;

5.12. $\left(\frac{1}{3-2i^{19}}\right)^2+\frac{2}{3i^{25}+2}$;

5.13. $\left(\frac{2}{2-3i^{11}}\right)^2+\frac{3i}{3i^{22}-2}$;

5.14. $\left(\frac{i}{2+5i^{25}}\right)^2-\frac{1}{2+i^{17}}$;

5.15. $\left(\frac{i^3}{1-2i^{15}}\right)^2-\frac{5i+1}{1-3i^{16}}$;

5.16. $\left(\frac{4i+1}{2+5i^{16}}\right)^2-\frac{1}{i+1+2i^{19}}$;

5.17. $\left(\frac{i-6}{2-i}\right)^2+\frac{8i^5-2}{i^{34}+3}$;

5.18. $\left(\frac{5}{i^{29}+4}\right)^2+\frac{7+3i}{2i^{12}-1}$;

5.19. $\left(\frac{3i}{2i^{11}+1}\right)^2-\frac{9}{1-4i^{17}}$;

5.20. $\left(\frac{i^5}{2+2i^{21}}\right)^2+\frac{4}{8i^{23}-1}$.

6. Решить уравнение:

6.1. $z^6+6=0$;

6.2. $z^4-1=i$;

6.3. $z^4+i=0$;

6.4. $z^7+7=0$;

6.5. $z^3-1=i\sqrt{3}$;

6.6. $z^4+5=0$;

6.7. $z^5-32=0$;

6.8. $z^6-i=\sqrt{3}$;

6.9. $z^3-i\sqrt{3}=1$;

6.10. $z^5+2i=2$;

6.11. $z^6+i=1$;

6.12. $z^3+2=2i$;

6.13. $z^5-i\sqrt{3}=1$;

6.14. $z^4+16=0$;

6.15. $z^6-1=0$;

6.16. $z^3-i=\sqrt{3}$;

6.17. $z^5+i=0$;

6.18. $z^6+3i=0$;

6.19. $z^4+i=1$;

6.20. $z^5+10=0$.

7. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

7.1. $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{x^4+64}$;

7.2. $\int_1^{\infty}\frac{2xdx}{16x^4-1}$;

7.3. $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$;

7.4. $\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$;

7.5. $\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$;

7.6 $\int_{1/2}^{\infty}\frac{16dx}{\pi(4x^2+4x+5)}$;

7.7. $\int_0^{\infty} \frac{arctg2x\,dx}{\pi(1+4x^2)}$; 7.8. $\int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$; 7.9. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2-4x)\ln 3}$;

7.10. $\int_{e^3}^{\infty} \frac{3dx}{x(\ln x-1)^2}$; 7.11. $\int_0^{\infty} \frac{2xdx}{81x^4+1}$; 7.12. $\int_1^{\infty} \frac{4x^3dx}{5x^4-1}$;

7.13. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+18}$; 7.14. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2}$; 7.15. $\int_4^{\infty} \frac{3dx}{\sqrt{(x^2-4x+1)}}$;

7.16. $\int_0^{\infty} \frac{2xdx}{\sqrt[4]{(x^2+1)^5}}$; 7.17. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}\,dx}{1+4x^2}$; 7.18. $\int_1^{\infty} \frac{5dx}{x(1+\ln x)^5}$;

7.19. $\int_0^{\infty} x\sin x dx$; 7.20. $\int_0^{\infty} e^{-5x} x dx$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертеж.

8.1. $y=|x+1|$, $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2}$. 8.2. $y=0$, $y=\frac{\pi}{2}(x+1)$, $y=\arccos x$.

8.3. $y=\frac{1}{9}x^2$, $y=\frac{10}{x^2+1}$. 8.4. $x=2$, $y=1$, $y=\ln(x-1)$.

8.5. $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\frac{\pi}{8}(-x+3)$, $y=0$. 8.6. $y=1+2x-x^2$, $y=\sqrt[5]{(x-1)^2}$.

8.7. $y=x$, $y=2x$, $y=-x+6$. 8.8. $y=\sqrt{\frac{9}{2}(x+1)}$, $y=x+2$.

8.9. $y=2|x|$, $y=2^{|x|}$. 8.10. $y=\sqrt[3]{x-1}$, $y=(x-1)^5$.

8.11. $y=\frac{2}{1+x^2}$, $y=|x|$. 8.12. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2}$, $y=|x-2|$.

8.13. $y=\frac{\pi(4-x)}{8}$; $y=\operatorname{arctg}(x-1)$; $y=0$. 8.14. $y=\arcsin x$, $y=\frac{\pi x}{2}$.

8.15. $y=\arccos(x-1)$, $y=\frac{\pi x}{2}$, $y=0$. 8.16. $y=(x-2)^3$, $y=\sqrt[5]{x-2}$.

8.17. $y=4-3|x|$, $y=\frac{2}{x^2+1}$. 8.18. $y=x^2$, $y=3\cdot(\frac{1}{3})^{|x|}$.

8.19. $x=0$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$. 8.20. $2x-y-1=0$, $y=x^2-4$.

Далее приводится порядок и методика решения типовых задач из контрольной работы.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Вариант № 0

1.0. Найти указанные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-10x+12}{x^2-12x+20}$.

Решение. Разложим на множители выражения:

$2x^2-10x+12=2(x-2)(x-3)$ и $x^2-12x+20=(x-2)(x-10)$.

Тогда: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-10x+12}{x^2-12x+20}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=2\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=$

$=2\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x-10}=\left|2\dfrac{2-3}{2-10}=2\dfrac{-1}{-8}\right|=\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x+3}$.

Решение.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x+1}{x-1}-1\right)^{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x+1-x+1}{x-1}\right)^{2x+3}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x+3}{x-1}\cdot 2}=\mathrm{e}^{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x-1}}=\mathrm{e}^4$.

Ответ: e^4.

в) $\lim\limits_{x\to 1}\ \dfrac{\sqrt{17-x}-4}{3-\sqrt{8+x}}$.

Решение.

$\lim\limits_{x\to 1}\ \dfrac{\sqrt{17-x}-4}{3-\sqrt{8+x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{17-x}-4)\cdot(\sqrt{17-x}+4)\cdot(3+\sqrt{8+x})}{(3-\sqrt{8+x})\cdot(3+\sqrt{8+x})\cdot(\sqrt{17-x}+4)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\ \dfrac{(17-x-16)\cdot(3+\sqrt{8+x})}{(9-(8+x))\cdot(\sqrt{17-x}+4)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)\cdot(3+\sqrt{8+x})}{(1-x)\cdot(\sqrt{17-x}+4)}=$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3+\sqrt{8+x}}{\sqrt{17-x}+4} = \left|\frac{3+3}{4+4}\right| = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 5x - 1}{\arcsin^2 3x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x-1}{\arcsin^2 3x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x-1}{\arcsin^2 3x} = \left|\begin{array}{c} 1-\cos u \sim \frac{u^2}{2} \text{ ïðè } u \to 0 \\ 1-\cos 5x \sim \frac{25x^2}{2} \text{ ïðè } x \to 0 \\ \arcsin u \sim u \text{ ïðè } u \to 0 \\ \arcsin^2 3x \sim 9x^2 \text{ ïðè } x \to 0 \end{array}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{25x^2}{2}}{9x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{25x^2}{18x^2} = \frac{25}{18}.$$

Ответ: $\frac{25}{18}$.

2.0. Исследовать функцию на непрерывность. Указать точки разрыва, определить их род. Сделать схематический чертеж.

$$y = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & x < 1, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

Решение.

Функция не определена при $x = 1$, поэтому условие непрерывности $\lim\limits_{x\to 1} y = y(1)$ не выполняется, и $x = 1$ – точка разрыва функции. Найдем пределы функции слева и справа:

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{-\infty} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} \operatorname{arctg}\frac{2}{x-1} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Односторонние пределы конечные и неравные, следовательно, $x = 1$– точка разрыва 1-го рода.

Для построения схематического чертежа:

а) вычислим $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

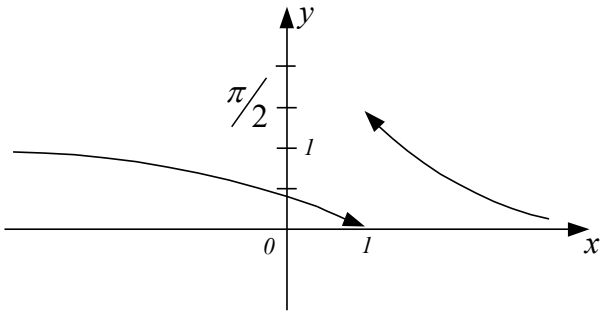
$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^0 = 1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\frac{2}{x-1} = \operatorname{arctg}\ 0 = 0.$$

б) найдем точки пересечения с осями.

При x=0 $y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Построим схематический чертеж:



Ответ: функция имеет единственный разрыв в точке x=1, который является разрывом первого рода.

3.0. Найти производную y'_x функции, заданной явно, неявно или параметрически:

1) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x^2} + x^3 \ln x - 6.$

Решение.

$$y'_x = (\sqrt{\operatorname{arctg} x^2})' + (x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)' - 6' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x + 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{(1+x^4)\sqrt{\operatorname{arctg} x^2}} + 3x^2 \ln x + x^2.$$

Ответ: $y' = \frac{x}{(1+x^4)\sqrt{\operatorname{arctg} x^2}} + 3x^2 \ln x + x^2.$

2) $x^3y^2 - \cos 3y - 2x = 1.$

Решение.

$3x^2y^2 + 2x^3y \cdot y' + 3\sin 3y \cdot y' - 2 = 0; \quad (2x^3y + 3\sin 3y)y' = 2 - 3x^2y^2;$

$y'_x = \dfrac{2 - 3x^2y^2}{2x^3y + 3\sin 3y}.$

Ответ: $y'_x = \dfrac{2 - 3x^2y^2}{2x^3y + 3\sin 3y}.$

3) $x = \arcsin t, \ \ y = 2^{4t+1}.$

Решение.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4 \cdot 2^{4t+1} \ln 2}{\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = 4 \cdot 2^{4t+1} \ln 2 \cdot \sqrt{1-t^2}.$$

Ответ: $y'_x = 4 \cdot 2^{4t+1} \ln 2 \cdot \sqrt{1-t^2}$.

4.0. Найти и построить асимптоты графика функции $y = \dfrac{2x^3 + x - 9}{x^2 - 2x - 8}.$

Решение.

1. *Вертикальные асимптоты*: $\lim\limits_{x \to -2} y = \infty$ и $\lim\limits_{x \to 4} y = \infty$, отсюда следует, что прямые $x = -2$ и $x = 4\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ являются вертикальными асимптотами графика.

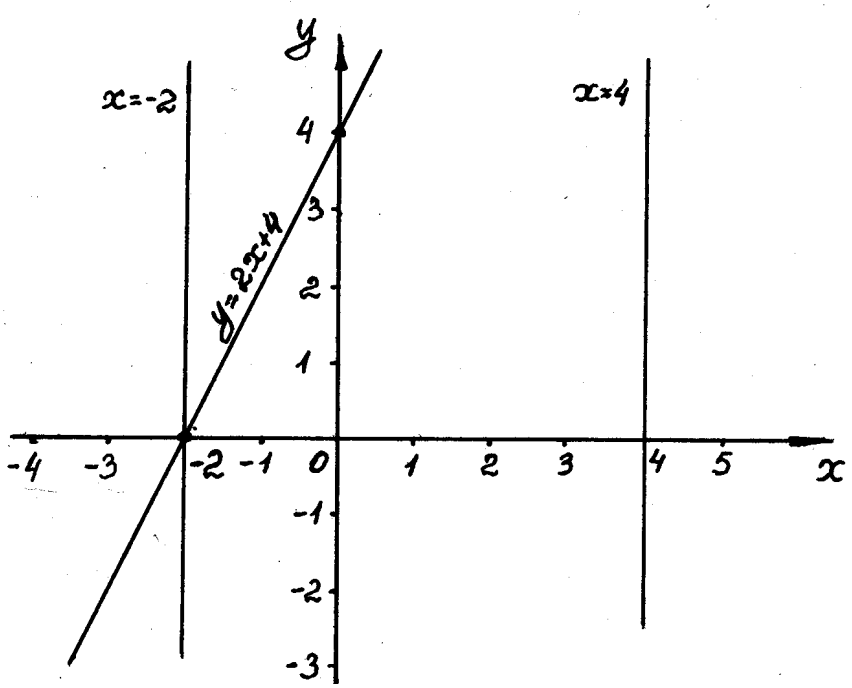
2. *Наклонные асимптоты*. Уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b.$

1) $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + x - 9}{x(x^2 - 2x - 8)} = 2.$

2) $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^3 + x - 9}{x^2 - 2x - 8} - 2x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + 17x - 9}{x^2 - 2x - 8} = 4.$

Тогда $y = 2x + 4$ – уравнение наклонной асимптоты.

Построим асимптоты:



Ответ: Вертикальные асимптоты x=-2, x=4; наклонная асимптота y=2x+4.

5.0. Вычислить комплексное число. Ответ записать в алгебраической форме.

$$\left(\frac{2+i^5}{i^{42}-3}\right)^2-\frac{5}{2i^{27}+1}.$$

Решение.

Упростим:

$$i^5=\left(i^2\right)^2\cdot i=\left(-1\right)^2\cdot i=i,$$

$$i^{42}=\left(i^2\right)^{21}=\left(-1\right)^{21}=-1,$$

$$i^{27}=i^{26}\cdot i=\left(i^2\right)^{13}\cdot i=\left(-1\right)^{13}\cdot i=-i$$

Выражение примет вид:

$$\left(\frac{2+i}{-1-3}\right)^2-\frac{5}{-2i+1}=\left(-\frac{2+i}{4}\right)^2-\frac{5}{1-2i}=\frac{\left(2+i\right)^2}{16}-\frac{5\left(1+2i\right)}{\left(1-2i\right)\left(1+2i\right)}=$$

$$=\frac{4+4i+i^2}{16}-\frac{5+10i}{1-4i^2}=\frac{-65-140i}{80}=-\frac{65}{80}-\frac{140}{80}i=-\frac{13}{16}-\frac{7}{4}i.$$

Ответ: $-\frac{13}{16}-\frac{7}{4}i.$

6.0. Решить уравнение $z^3+1=0$.

Решение.

$z^3+1=0, \quad z^3=-1, \quad z=\sqrt[3]{-1}.$

В тригонометрической форме число -1 имеет вид: $-1=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$.

С учетом формул, корни исходного уравнения:

$$z_k=\sqrt[3]{-1}=1\cdot\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right),\ k=0,\ 1,\ 2.$$

$$z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad z_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ:

$$z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad z_1=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7.0. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^3}$;

Решение.

Найдем $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^{-1}\frac{dx}{x^3}=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_a^{-1}=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2a^2}\right)=-\frac{1}{2}$.

То есть несобственный интеграл сходится.

Ответ: $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}$, несобственный интеграл сходится.

б) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$;

Решение.

$$\lim_{a\to+\infty}\int_1^a\frac{\ln(x+1)\,dx}{x+1}=\lim_{a\to+\infty}\int_1^a\ln(x+1)\,d(\ln(x+1))=\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{\ln^2(x+1)}{2}\right)\Big|_1^a=$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln^2 (a+1) - \frac{1}{2} \ln^2 2 \right) = +\infty.$$

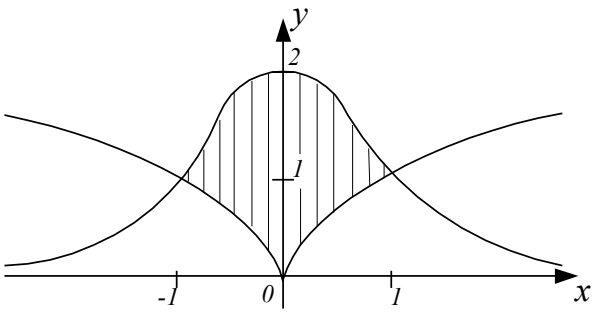
Т. е. несобственный интеграл расходится.

Ответ: интеграл расходится.

8.0. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x^2+1}$, $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение.

Фигура сверху ограничена линией $y = \frac{2}{x^2+1}$, а снизу линией $y = x^{2/3}$.



Следовательно,

$$S = 2\int_0^1 \left(\frac{2}{x^2+1} - x^{2/3}\right)dx = 2\left(2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} - \int_0^1 x^{2/3}dx\right) =$$

$$= 2\left(2\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{3}{5}x^{5/3}\Big|_0^1\right) = 2\left(2\operatorname{arctg} 1 - \frac{3}{5}\right) = 2\left(2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{3}{5}\right) = \pi - \frac{6}{5}.$$

Ответ: $S = \pi - \frac{6}{5}$ ед^2.